CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1976

OPTION SCIENCES

EPREUVE DE CALCUL

Durée : 2 heures

Vendredi 7 mai 1976 de 14 heures à 16 heures

L'épreuve comporte trois parties. Le résultat numérique de la première étant utilisé dans la seconde, il en est donné une valeur (arrondie à deux décimales) que le candidat pourra utiliser. Les calculs seront détaillés et présentés sous forme de tableaux.

1

Soit $P(x) = a_0 x^5 + a_1 x^4 + a_2 x^3 + a_3 x^2 + a_4 x + a_5$ un polynôme à coefficients réels dont les racines notées u_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ sont supposées simples, réelles, de modules distincts et numérotées selon l'ordre décroissant de leur module :

$$|u_1| > |u_2| > |u_3| > |u_4| > |u_5|$$

a) Montrer que le polynôme $Q(x) = -P(x)\,P(-x)$ s'écrit sous la forme $Q(x) = \widetilde{P}(x^2)$, où $\widetilde{P}$ est un polynôme de degré 5 dont les racines sont $\widetilde{u}_i = u_i^2$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$

Au polynôme P, on associe la suite des polynômes P_k définis par :

$$\begin{cases} P_0(x) = P(x) \\ P_k(x) = \widetilde{P}_{k-1}(x) \qquad \text{pour } k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

b) Montrer que P_k a cinq racines distinctes : $u_i^{2^k}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$.

On donne :

$$P(x) = 1{,}92\,x^5 - 4{,}72\,x^4 - 2{,}2\,x^3 + 4{,}02\,x^2 + 2{,}33\,x + 0{,}3\,.$$

c) Calculer les coefficients des polynômes $P_k(x)$ pour $k = 1, 2, 3, 4$ avec la précision que permet la règle à calcul.

d) Avec quelle précision les coefficients de P_5 seront-ils connus ?

.../...

2

Soit $R(x) = b_0 x^5 + b_1 x^4 + b_2 x^3 + b_3 x^2 + b_4 x + b_5$ un polynôme à coefficients réels dont les racines notées v_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ sont supposées réelles positives et telles qu'il existe un nombre positif ε assez petit tel que :

$$0 < v_i \leqslant \varepsilon\, v_{i-1} \qquad \text{pour } i = 2, 3, 4 \text{ et } 5 .$$

On définit les six nombres :

$$S_0 = 1$$

$$S_1 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5$$

$$S_2 = v_1 (v_2 + v_3 + v_4 + v_5) + v_2 (v_3 + v_4 + v_5) + v_3 (v_4 + v_5) + v_4 v_5$$

$$S_3 = v_1 (v_2 (v_3 + v_4 + v_5) + v_3 (v_4 + v_5) + v_4 v_5) + v_2 (v_3 (v_4 + v_5) + v_4 v_5) + v_3 v_1 v_5$$

$$S_4 = v_1 (v_2 (v_3 (v_4 + v_5) + v_4 v_5) + v_3 v_4 v_5) + v_2 v_3 v_4 v_5$$

$$S_5 = v_1 v_2 v_3 v_4 v_5$$

et on rappelle que :

$$b_m = (-1)^m b_0 S_m \qquad (m = 1, 2, 3, 4, 5)$$

a) Montrer que :

$$S_m \leqslant S_{m-1} \times \frac{v_m}{1-\varepsilon} \qquad \text{pour } m = 1, 2, 3, 4 \text{ et } 5$$

b) Montrer que :

$$-\frac{b_m}{b_{m-1}} \times (1 - \varepsilon) \leqslant v_m \leqslant -\frac{b_m}{b_{m-1}} \times \frac{1}{(1-\varepsilon)^{m-1}} \qquad \text{pour } m = 1, 2, 3, 4 \text{ et } 5.$$

Ces inégalités montrent que $-\dfrac{b_m}{b_{m-1}}$ est une approximation suffisamment précise de v_m, pourvu que ε soit assez petit.

c) Utiliser ce résultat pour calculer des approximations des racines du polynôme $P_4(x)$ calculé en première partie, ou, à défaut, du polynôme à coefficients arrondis :

$$\bar{P}_4(x) = 3{,}4 \times 10^4 x^5 - 7{,}9 \times 10^{10} x^4 + 1{,}6 \times 10^{12} x^3 - 2{,}4 \times 10^9 x^2 + 3{,}7 \times 10^2 x - 4{,}3 \times 10^{-9}$$

Avec quelle précision relative ces racines sont-elles connues ?

d) Déduire du résultat précédent des approximations des modules des racines de $P(x)$.

Avec quelle précision relative ces modules sont-ils calculés ?

e) Déterminer le signe de chacune des racines de $P(x)$.

3

Calculer une approximation à 10^{-4} près de la racine u_2 de $P(x)$, en appliquant la méthode de Newton à partir de la valeur initiale $x_0 = 1{,}2$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail